องค์ความรู้

เรื่อง

ระบบโปรแกรมคณิตศาสตร์สำหรับการจัดการทรัพยากรป่าไม้

Mathematic Programming for Forest Resources Management

เทคนิคกำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming: LP)

โดย

นายณรงค์ชัย ชลภาพ

เสนอ

คณะทำงานการจัดการองค์ความรู้

สำนักนวัตกรรมไม้เศรษฐกิจ องค์การอุตสาหกรรมป่าไม้

ประจำปี 2559

บทนำ

ทรัพยากร หมายถึง สิ่งที่มีไว้ใช้งานในองค์กรหรือบริษัท เพื่อเพิ่มผลิตหรือผลประโยชน์ให้แก่องค์กร ซึ่งทรัพยากรนี้รวมถึง โรงงาน พนักงาน วัตถุดิบและทรัพย์สินต่าง ๆ โดยทั่วไป ทรัพยากรในองค์กรมักมีอยู่อย่างจำกัด เช่น จำนวนพนักงานที่ควบคุมเครื่องจักรในโรงงานแห่งหนึ่ง จำนวนเงินสดทุนหมุนเวียนในการดำเนินงานของบริษัท จำนวนรถบรรทุกที่มีไว้ขนส่งสินค้าของบริษัทขนส่งและโลจิสติกส์ เป็นต้น โดยทั่วไป ทรัพยากรเหล่านี้มีอยู่จำนวนจำกัดในองค์กรทำให้องค์กรต้องมีการใช้หรือการจัดสรรทรัพยากรเหล่านี้ให้เกิดประโยชน์สูงสุด ซึ่งประสิทธิภาพในการจัดสรรทรัพยากรอาจวัดในรูปของปริมาณการผลผลิตสูงสุด หรือ กำไรสูงสุด วิธีการจัดสรรทรัพยากรให้ได้ประโยชน์สูงสุด การสร้างตัวแบบเพื่อการตัดสินใจ (Decision model) ของปัญหาปัจจุบัน ผลของตัวแบบเป็นการประมวลผลโดยในเชิงตัวเลข โดยไม่มีอคติของผู้ตัดสินใจ หรืออารมณ์ของผู้ตัดสินใจ เราเรียกตัวแบบประเภทนี้ว่า ตัวแบบคณิตศาสตร์ (Mathematical model) ที่แสดงความสัมพันธ์เชิงคณิตศาสตร์ของสิ่งต่าง ๆ ที่เราสนใจหรือเงื่อนไขต่าง ๆ ที่จำเป็นต้องคำนึงถึงในสถานการณ์ของปัญหานั้น ซึ่งการใช้ตัวแบบคณิตศาสตร์เพื่อการตัดสินใจทำให้การตัดสินใจของผู้บริหารดีขึ้น หรือเพื่อทำให้เข้าใจสถานการณ์ปัจจุบันได้ดีขึ้น (Klingman, Phillips, & Young, 1987; Wintson, 2004) ตัวแบบคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ในแก้ปัญหาการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดนี้ จึงเรียกว่า ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร (Resource allocation model)

<u>องค์ประกอบของตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร</u>

ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร มีองค์ประกอบสำคัญ 3 ส่วน คือ

(1) ตัวแปรตัดสินใจ (Decision variables) ตัวแปรที่แทนกิจกรรมต่างๆ ของปัญหาที่เราสนใจ การหาค่าของตัวแปรตัดสินใจ เป็นการหาว่าเราควรกระทำกิจกรรมมากน้อยในระดับใด เพื่อแก้ปัญหาที่เกิดขึ้น เช่น ในการผลิตสินค้าในโรงงานแห่ง ผู้มีหน้าที่รับผิดชอบในเรื่องการวางแผนการผลิตต้องการทราบว่าควรผลิตสินค้าแต่ละชนิดจำนวนเท่าใดในแต่ละสัปดาห์ สำหรับปัญหาการขนส่งสินค้าจากโรงงานไปยังลูกค้า ผู้รับผิดชอบต้องการทราบว่าจะส่งสินค้าไปตามเส้นทางใด จำนวนเท่าใด เป็นต้น

(2) ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Objective function) ในการตัดสินใจแก้ปัญหาหนึ่ง ๆ เราอาจมีผลเฉลย (Solution) ของปัญหาได้หลายผลเฉลย ผู้ตัดสินใจต้องการเลือกผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งเกณฑ์ในการเลือกผลเฉลยนี้จะสอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของการจัดสรรทรัพยากร ฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตัดสินใจต่าง ๆ กับวัตถุประสงค์ของปัญหา ฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะสะท้อนว่าผลเฉลยนั้นความสอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของจัดสรรทรัพยากรมากน้อยเพียงใด เช่น ปัญหาการจัดสรรเงินทุน 5 ล้านบาท เพื่อลงทุนในธุรกิจ 4 ประเภท เราอาจกำหนดให้ตัวแปรตัดสินใจ xk แทนปริมาณเงินลงทุนในธุรกิจที่ i โดย i = 1, 2, 3, 4 การพิจารณาการลงทุนนี้ ผู้ตัดสินใจต้องการให้ผลตอบแทนรายปีมีค่าสูงสุด ฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะเป็นฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณเงินลงทุนในธุรกิจทั้ง 4 ประเภทกับร้อยละของผลตอบแทนรายปีของธุรกิจแต่ละประเภท สำหรับการหาผลเฉลยจะเลือกจากผลเฉลยที่ทำให้ผลรวมของผลตอบแทนรายปีมีค่าสูงสุด ดังนั้นเราจึงเรียกทิศทางของฟังก์ชันวัตถุประสงค์นี้ ว่าเป็น ค่าสูงสุด (Maximization) เป็นต้น ในทางกลับกัน ปัญหาการขนส่งสินค้าจำนวนหนึ่งจากโรงงานไปยังลูกค้า เราอาจกำหนดตัวแปรตัดสินใจ x j แทนปริมาณสินค้าที่ส่งผ่านเส้นทาง j โดย j = 1, 2,..., 5 เพื่อให้ผลรวมค่าขนส่งต่ำที่สุด ฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะเป็นฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ของค่าขนส่งสินค้ากับปริมาณขนส่งในแต่ละ

เส้นทาง ผลเฉลยเหมาะสมที่สุด จะเลือกจากผลเฉลยที่ให้ผลรวมของค่าขนส่งต่ำที่สุด เราจึงเรียกทิศทางของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ในลักษณะนี้ว่า ค่าต่ำสุด (Minimization) นอกจากนี้ ปัญหาหนึ่ง ๆ นักวิเคราะห์สามารถกำหนดฟังก์วัตถุประสงค์ได้มากกว่าหนึ่งวัตถุประสงค์ถ้าปัญหาที่ต้องการศึกษามีเป้าหมายหรือวัตถุประสงค์หลายประการ

(3) ข้อจำกัด (Constraints) เงื่อนไขข้อจำกัดหรือของปัญหา บอกให้ผู้วิเคราะห์ทราบว่าทำอะไรได้บ้างไม่ได้บ้าง เช่น ในการวางแผนการผลิตสินค้าที่กล่าวไว้ข้างต้น อาจมีข้อจำกัดด้านแรงงานที่ใช้ในการผลิตในแต่ละสัปดาห์ หรือ ปริมาณความต้องการสูงสุดของสินค้าแต่ละชนิด ในตัวอย่างการลงทุน อาจมีนโยบายในการลงทุนว่า การลงทุนในธุรกิจประเภทที่ 2 มีความเสี่ยงสูงผู้บริหารอาจไม่ต้องการที่จะลงทุนมาก จึงกำหนดเป็นนโยบายว่าการลงทุนประเภทที่ 2 จะไม่เกิน 1 ล้านบาท เป็นต้น

<u>ขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร</u>

ขั้นตอนการสร้างตัวแบบเพื่อการตัดสินใจแบ่งได้เป็น 3 ขั้นตอนใหญ่ ๆ ดังนี้

1. การกำหนดปัญหา (Formulation)
2. การหาคำตอบ (Solving)
3. การตีความหมายและการวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์ (Interpretation and sensitivity analysis)

<u>1. การกำหนดปัญหา</u>

เป็นกระบวนการในการพิจารณาสถานการณ์ของปัญหาแล้วแปลงไปสู่ตัวแบบคณิตศาสตร์ ในส่วนนี้เป็นที่สำคัญที่สุด เนื่องจากผลของขั้นตอนนี้อาจทำให้เราได้ตัวแบบที่ไม่ดี ซึ่งจะส่งผลทำให้ผลเฉลย (Solution) นั้นผิดไป ดังนั้น ความสามารถของนักวิเคราะห์ผู้สร้างตัวแบบจึงมีส่วนที่สำคัญมาก ถึงแม้ในปัจจุบันเราจะมีโปรแกรมสำเร็จรูป (Software program) ที่ช่วยในการแก้ปัญหาตัวแบบคณิตศาสตร์ ที่แต่โปรแกรมสำเร็จรูปเหล่านั้น ไม่สามารถสร้างตัวแบบของปัญหาต่าง ๆ ได้อย่างอัตโนมัติ วัตถุประสงค์ของการกำหนดปัญหานี้เพื่อให้แน่ใจว่าตัวแบบคณิตศาสตร์นี้สามารถกล่าวถึงปัญหาในประเด็นที่สำคัญ ๆ ได้อย่างครบถ้วน ดังนั้นการกำหนดปัญหาจึงสามารถแบ่งได้เป็น 3 ส่วน

(1) การระบุปัญหา (Defining the problem) ส่วนแรกของการกำหนดปัญหานี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างคำจำกัดความที่สั้น กระทัดรัดและได้ใจความ ซึ่งข้อความนี้มีความหมายและระบุส่วนต่าง ๆ ของปัญหา การระบุปัญหาอาจเป็นส่วนที่สำคัญที่สุดและยากที่สุด ในหลายๆ กรณี เราอาจไม่ได้คำนึงถึงเฉพาะลักษณะปัญหาที่เกิดขึ้น แต่ต้องพิจารณาถึงสาเหตุของปัญหาที่แท้จริง ปัญหาหนึ่งอาจมีความสัมพันธ์กับอีกปัญหาหนึ่ง ทำให้การแก้ปัญหานี้โดยไม่คำนึงถึงปัญหาที่เกี่ยวข้องอาจทำให้ปัญหาซับซ้อนขึ้น หากเราแก้ปัญหาใดปัญหาหนึ่งเพียงปัญหาเดียวผลเฉลยที่ได้อาจไม่เหมาะสมกับสถานการณ์จริง ดังนั้น จึงควรมีการวิเคราะห์ว่าผลลัพธ์จากปัญหาหนึ่งมีผลต่อปัญหาอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องอย่างไร

การกำหนดวัตถุประสงค์ของตัวแบบ เราต้องกำหนดให้สามารถวัดค่าได้ ตัวอย่างเช่น ปัญหาการบริการของโรงพยาบาล (Health care delivery) ว่ามีความรวดเร็วและทันเวลาในโรงพยาบาล ตัววัด (วัตถุประสงค์) ที่อาจมีได้หลายอย่าง เช่น การเพิ่มขึ้นของจำนวนเตียง การลดจำนวนวันโดยค่าเฉลี่ยที่ผู้ป่วยอยู่

ในโรงพยาบาล การเพิ่มขึ้นของสัดส่วนแพทย์กับคนไข้ และอื่นๆ เมื่อตัววัด(วัตถุประสงค์)เหล่านี้ได้ถูกนำมาพิจารณา (Blake and Carter, 2002) ปัญหาที่แท้จริงควรจะถูกนำมาพิจารณาด้วย

(2) การพัฒนาตัวแบบ (Developing a model) การพัฒนาตัวแบบ เมื่อเราสามารถเลือกปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ ขั้นตอนต่อไปคือ การสร้างตัวแบบตัดสินใจ ส่วนหนึ่งของตัวแบบคณิตศาสตร์ ก็คือ เซตของความสัมพันธ์เชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งความสัมพันธ์นี้สามารถแสดงในรูปสมการหรืออสมการ โดยทั่วไป ตัวแบบมักจะมีตัวแปรตัดสินใจและพารามิเตอร์มากกว่าหนึ่งตัว ตัวแปรตัดสินใจ หมายถึง ปริมาณของสิ่งหรือกิจกรรมที่ต้องการวัด พารามิเตอร์ของปัญหาเป็นข้อมูลเชิงปริมาณของปัญหา เช่น ในการผลิตขนมเค็กชนิดหนึ่ง ต้นทุนในการสั่งซื้อสินค้า ปริมาณส่วนผสม ซึ่งประกอบด้วย แป้ง น้ำตาล และไข่ไก่ โดยทั่วไป ค่าตัวแปรตัดสินใจ ก็คือปริมาณของสิ่งของหรือกิจกรรมที่ผู้ตัดสินใจต้องการทราบค่า ขณะที่พารามิเตอร์เป็นปริมาณที่เราทราบค่าจากนโยบายขององค์กร หรือสภาพสถานการณ์ปัจจุบัน

หากตัวแบบมีการสร้างอย่างระมัดระวัง ที่จะรวบรวมรายละเอียดของปัญหาจำนวนหนึ่งได้อย่างเหมาะสม ส่วนรายละเอียดที่เหลืออาจสร้างเป็นข้อตกลงของตัวแบบไว้ ตัวแบบที่ดีนั้น ควรจะสามารถหาผลเฉลยที่เป็นไปได้ในสถานการณ์จริงและง่ายในการทำความเข้าใจและปรับปรุง รวมทั้งข้อมูลนำเข้าสามารถหาได้จากการเก็บรวบรวมข้อมูล ปัญหาหนึ่ง ๆ อาจง่าย หรือซับซ้อนขึ้นอยู่กับผู้พัฒนาตัวแบบว่าต้องการรวบรวมรายละเอียดของปัญหาไว้ในตัวแบบมากน้อยเพียงใด หากรวบรวมรายละเอียดไว้มาก ส่วนที่เหลือกก็จะสร้างเป็นข้อตกลงไว้ ตัวแบบลักษณะนี้จะความซับซ้อนมากขึ้น การสร้างตัวแบบลักษณะนี้อาจยุ่งยากมากกว่าตัวแบบที่มีรายละเอียดน้อยและสร้างข้อตกลงไว้มาก รวมทั้งเวลาในการคำนวณเพื่อหาผลเฉลยก็อาจจะมากตามไปด้วย อย่างไรก็ตาม การสร้างข้อตกลงกับปัญหาไว้จำนวนมาก อาจทำให้ตัวแบบของเราขาดความยืดหยุ่นเหมือนกับปัญหาจริง ซึ่งอาจส่งผลให้ผลเฉลยที่ได้สอดคล้องกับปัญหาจริงได้น้อยลงไป ดังนั้นผู้พัฒนาตัวแบบจะต้องพิจารณาว่าจะรวมรายละเอียดของปัญหาไว้มากน้อยเพียงใด เพื่อให้ตัวแบบที่ได้สามารถหาผลเฉลยได้และยังคงเหมาะสมสำหรับปัญหาจริง

(3) การได้มาซึ่งข้อมูลนำเข้า (Acquiring input data) หลังจากที่สร้างตัวแบบแล้ว ทำให้ทราบว่าข้อมูลอะไรบ้างที่จำเป็นต้องรวบรวมเพื่อนำมาใช้เป็นข้อมูลนำเข้าในตัวแบบ โดยทั่วไปคือค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ นั่นเอง การรวบรวมข้อมูลเหล่านี้มีความสำคัญมากอีกประการหนึ่ง ถ้าเราได้ข้อมูลที่ไม่เหมาะสม ไม่ถูกต้องแม่นยำ ก็จะส่งผลให้ผลเฉลยที่ได้ผิดพลาดไป ข้อมูลที่ต้องการเก็บรวบรวมเพื่อมาใช้ในตัวแบบมักมาจากหลายแห่ง ในบางกรณี รายงานหรือเอกสารของบริษัทอาจนำมใช้เป็นข้อมูลสำหรับตัวแบบได้ บางครั้งอาจต้องใช้การสัมภาษณ์พนักงานในบริษัทหรือผู้เชี่ยวชาญหรือบุคคลที่เกี่ยวข้อง ตัวอย่างเช่น หัวหน้าแผนก อาจบอกกับเราถึงระดับความถูกต้องของเวลาที่ใช้ในการผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง บางครั้งอาจต้องใช้ข้อมูลเชิงสำรวจโดยการสุ่มตัวอย่างจากประชากรเป้าหมาย การสุ่มตัวอย่างและการวัดโดยตรงจากการทำงานจริง อาจเป็นอีกแหล่งข้อมูลสำหรับตัวแบบ ตัวอย่างเช่น เราอาจต้องการทราบว่าวัตถุดิบกี่กิโลกรัมที่ใช้ในการผลิตสินค้าชนิดหนึ่งจำนวน 1 ชิ้น ข้อมูลส่วนนี้อาจได้จากการไปที่โรงงานและทำการวัดปริมาณการใช้วัตถุดิบจากสายการผลิตโดยตรงโดยการสุ่มตัวอย่างและใช้เทคนิคทางสถิติเพื่อหาปริมาณวัตถุที่ใช้ อีกกรณีหนึ่งอาศัยข้อมูลทุติยภูมิจากฝ่ายผลิตหรือฝ่ายบัญชี เพื่อหาปริมาณดังกล่าว

2. การหาคำตอบ

ปัจจุบันการหาผลเฉลยอาจใช้โปรแกรมสำเร็จรูป (Software package) ดังนั้นในขั้นตอนนี้ประกอบด้วยขั้นตอนย่อย 2 ขั้นตอนคือ การหาผลเฉลย (Developing a solution) และการทดสอบผลเฉลย (Testing a solution)

(1) การหาผลเฉลยเป็นการหาคำตอบที่ดีที่สุดให้กับปัญหา ในบางกรณีอาจใช้การลองผิดลองถูกวิธีการต่าง ๆ เพื่อกำหนดผลเฉลยที่เป็นไปได้แล้วจำนวนหนึ่งเลือกหนึ่งผลเฉลยที่ดีที่สุดสำหรับปัญหาบางอย่างเราอาจต้องการทดลองทุก ๆ ค่าของตัวแปรในตัวแบบเพื่อให้การตัดสินใจที่ดีที่สุด ซึ่งวิธีการนี้เรียกว่า วิธีการแจงนับ (Enumerative method) สำหรับปัญหาที่ซับซ้อนและยาก เราอาจใช้อัลลอริทึมเข้ามาช่วยแก้ปัญหาอัลกอริทึมหนึ่งอาจประกอบด้วยอนุกรมของขั้นตอนที่มีการทำซ้ำจนกระทั่งเราสามารถหาคำตอบที่ดีที่สุด หากไม่คำนึงถึงวิธีการที่ใช้ความถูกต้องของผลเฉลยนี้ ขึ้นอยู่กับความถูกต้องของข้อมูลนำเข้าและตัวแบบ

(2) การทดสอบผลเฉลย ก่อนที่จะนำผลเฉลยมาวิเคราะห์และนำผลเฉลยที่ใช้ ควรมีการทดสอบเพราะว่าผลเฉลยขึ้นอยู่กับข้อมูลนำเข้าและตัวแบบ ซึ่งทั้งสองส่วนนี้จะต้องมีการทดสอบความถูกต้อง การทดสอบข้อมูลนำเข้าอาจทำได้หลายวิธี วิธีการหนึ่งคือการเก็บรวบรวม 8 ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร ข้อมูลเพิ่มเติมจากแหล่งอื่น ๆ และใช้สถิติในการทดสอบ เพื่อเปรียบเทียบว่า ข้อมูลที่เก็บได้ใหม่ กับข้อมูลเดิมมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ หากมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ แสดงว่าเรามีความจำเป็นต้องหาข้อมูลที่มีความถูกต้องมากกว่านี้ ถ้าข้อมูลนำเข้านี้มีความถูกต้อง แต่ผลเฉลยมีความไม่แน่นอน เที่ยงตรง หรือสอดคล้องกับปัญหา แสดงว่าตัวแบบอาจไม่เหมาะสม ในกรณีนี้ เราควรตรวจสอบตัวแบบว่าสามารถแสดงถึงสถานการณ์จริงหรือไม่

3. การตีความหมายและการวิเคราะห์ความไวของพารามิเตอร์

การแปลความหมายและการวิเคราะห์ความไว ซึ่งประกอบด้วย 2 ขั้นตอนย่อย คือ (1) การวิเคราะห์ผลเฉลยและการวิเคราะห์ความไว และ (2) การนำผลเฉลยไปประยุกต์ใช้

(1) การวิเคราะห์ผลเฉลยและการวิเคราะห์ความไว เริ่มจากการระบุความหมายโดยนัย (Implication) ของผลลัพธ์ ส่วนใหญ่ผลเฉลยของปัญหา อาจเป็นผลจากชนิดของกิจกรรม หรือการเปลี่ยนแปลงแนวทางในการที่องค์กรจะดำเนินงาน กิจกรรมหรือการเปลี่ยนแปลงจะถูกกำหนด และวิเคราะห์ก่อนที่จะนำไปประยุกต์ใช้ เนื่องจากตัวแบบคณิตศาสตร์ เป็นเพียงการประมาณของความจริง (Reality) การวิเคราะห์ความไวของการเปลี่ยนแปลงในตัวแบบ หรือข้อมูลนำเข้าจะเป็นส่วนสำคัญของการวิเคราะห์ผลเฉลย ซึ่งการวิเคราะห์นี้เรียกว่า การวิเคราะห์ความไว หรือ การวิเคราะห์หลังได้ค่าเหมาะสมที่สุดแล้ว (Post-optimality) หรือ What-if Analysis การวิเคราะห์ความไว (Sensitivity Analysis) นำมาใช้เพื่อระบุการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลย เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าของพารามิเตอร์ หรือเงื่อนไขต่าง ๆ ของตัวแบบ การวิเคราะห์ความไว เป็นการทดสอบเพิ่มเติมที่จะนำมาใช้ เพื่อให้มั่นใจว่า ผลเฉลยยังคงเหมาะสมหรือไม่อยู่เมื่อค่าพารามิเตอร์หรือเงื่อนไขเปลี่ยนไป

(2) การนำผลเฉลยไปประยุกต์ใช้ ส่วนนี้เป็นส่วนที่สำคัญอีกส่วนหนึ่งที่สำหรับคณะนักวิเคราะห์ถึงแม้ว่าบริษัทผลเฉลยจากตัวแบบจะระบุว่าบริษัทสามารถทำกำไรได้เพิ่มขึ้นเป็นหลักล้านบาท แต่ผู้บริหาร

อาจยังคงปฏิเสธผลเฉลยนี้ ทำให้ตัวแบบที่สร้างขึ้นนั้น สูญเปล่า เมื่อมีการทำผลเฉลยไปใช้แล้วจะต้องมีการคอยตรวจดูอย่างใกล้ชิด บ่อยครั้งเมื่อเวลาเปลี่ยนไป ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ต้องเปลี่ยนแปลงไป เช่น การเปลี่ยนแปลงทางเศรษฐศาสตร์ ความต้องการสินค้า เป็นต้น ทำให้ผู้วิเคราะห์ต้องมีการปรับตัวแบบให้เหมาะสมอยู่เสมอ

<u>หลักและวิธีการของเทคนิคกำหนดการเชิงเส้น (Linear programming)</u>

โดยทั่วไปการโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย ตัวแปรตัดสินใจ (Decision variable) ซึ่งแทนปริมาณของกิจกรรมต่าง ๆ ที่พิจารณา ข้อจำกัด(Constraint) เป็นเงื่อนไขที่ระบุว่าปัญหานี้จะทำอะไรได้บ้างหรือทำกิจกรรมอะไรไม่ได้บ้าง ส่วนใหญ่ ข้อจำกัดของทรัพยากรที่มีอยู่ (Resource constraint) ซึ่งเขียนในรูปความสัมพันธ์ของอัตราการใช้ทรัพยากรของแต่ละกิจกรรม และ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Objective function) แสดงถึงประสิทธิผลของการใช้ทรัพยากรเพื่อทำกิจกรรมเหล่านี้ ในกรณีที่ความสัมพันธ์ของตัวแปรตัดสินใจในข้อจำกัด และฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นแบบเชิงเส้นตรง จะเรียกการโปรแกรมเชิงคณิตศาสตร์นี้ว่า การโปรแกรมเชิงเส้น หรือเทคนิคกำหนดการเชิงเส้น (Linear programming)

การแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในทางธุรกิจ อุตสาหกรรม หรือภาครัฐ นักวิเคราะห์ระบบต้องศึกษาปัญหาที่เกิดขึ้น เพื่อให้เข้าใจถึงปัญหาอย่างแท้จริง พิจารณาข้อจำกัด สมมติฐาน และวัตถุประสงค์ของการศึกษาปัญหาเสียก่อน แล้วจึงนำรายละเอียดต่าง ๆ มาสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ขั้นตอนการสร้างตัวแบบของปัญหาสามารถสรุปได้ดังนี้

(1) กำหนดตัวแปรตัดสินใจ (Defining decision variables) ตัวแปรตัดสินใจ หมายถึง กิจกรรมที่ผู้ตัดสินใจสนใจ ค่าของตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสมคือปริมาณของกิจกรรมที่ควรจะกระทำ ผู้ตัดสินใจจะนำค่าของตัวแปรนี้เพื่อไปใช้ประกอบการตัดสินใจ ในแต่ละปัญหาตัวแปรตัดสินใจอาจแตกต่างกันไป ตามลักษณะเฉพาะของปัญหา เช่น ปัญหาด้านการลงทุน เราอาจต้องการทราบว่าควรลงทุนในธุรกิจแต่ละประเภทจำนวนเท่าใด ปัญหาด้านการผลิต เราต้องการทราบว่าควรผลิตสินค้าแต่ละชนิดในแต่ละช่วงเวลาเป็นจำนวนเท่าใด เป็นต้น ตัวแปรตัดสินใจอาจเป็นตัวแปรมิติเดียวหรือหลายมิติก็ได้ ขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา เช่น ปัญหาการลงทุนข้างต้น อาจกำหนดให้ $x j$ เป็นตัวแปรตัดสินใจ แทนจำนวนเงินลงทุนที่จัดสรรให้กับธุรกิจประเภทที่ j สำหรับปัญหาการวางแผนการผลิตที่กล่าวข้างต้น อาจกำหนดให้ xij เป็นตัวแปรตัดสินใจ แทนปริมาณการผลิตสินค้า i ในช่วงเดือนที่ j เป็นต้น

(2) กำหนดฟังก์ชันเป้าหมายหรือฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Defining objective function) เป็นการกำหนดเป้าหมายของตัวแบบ เพื่อให้สามารถหาค่าของตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งทำให้บรรลุวัตถุประสงค์ได้มากที่สุด โดยทั่วไปเราจะต้องระบุถึงทิศทางของฟังก์ชันนี้ เช่น เป้าหมายการหาค่าสูงสุด หรือเป้าหมายการหาค่าต่ำสุด เป็นต้น

(3) กำหนดข้อจำกัดของปัญหา (Identifying constraints) เป็นการกำหนดข้อจำกัดของปัญหาในเทอมของตัวแปรตัดสินใจ โดยทั่วไป ข้อจำกัดพื้นฐานของปัญหาการหาค่าสูงสุด คือ ปริมาณทรัพยากรที่มีอยู่ ปริมาณสูงสุดที่เป็นไปได้ของตัวแปรตัดสินใจ ข้อกำหนดของผลิตภัณฑ์ (Product specifications) เป็นต้น ข้อจำกัดพื้นฐานสำหรับปัญหาการหาค่าต่ำสุด ได้แก่ ปริมาณต่ำสุดของตัวแปรตัดสินใจ ข้อกำหนดของผลิตภัณฑ์ ปริมาณทรัพยากรที่มีอยู่ เป็นต้น

(4) สร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น (Developing linear programming models) หลังจากได้กำหนดตัวแปรตัดสินใจและข้อจำกัดต่าง ๆ แล้ว จะนำเอาฟังก์ชันวัตถุประสงค์ และจำกัดมาพิจารณาร่วมกัน เพื่อให้สามารถหาผลเฉลย (Solution) ที่สอดคล้องกับข้อจำกัดและทำให้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าดีที่สุด

(5) ตรวจสอบความถูกต้อง (Validation) เป็นการตรวจสอบว่าตัวแบบที่สร้างขึ้นนี้ มีความถูกต้องหรือไม่ กล่าวคือ ต้องตรวจสอบความสัมพันธ์ของตัวแปรตัดสินใจ ข้อจำกัดต่างๆ และฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ระบุไว้นั้นว่าสอดคล้องกับปัญหาที่กำหนดไว้และครบถ้วนหรือไม่ ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ มีค่าที่ถูกต้องหรือไม่ หากตัวแบบที่สร้างขึ้นมีความผิดพลาดอันเนื่องมาจากสาเหตุต่าง ๆ เช่น ระบุความสัมพันธ์ไม่ครบถ้วน ความสัมพันธ์ไม่ถูกต้อง ค่าพารามิเตอร์ผิดพลาด เป็นต้น ผลเฉลยที่ได้จากตัวแบบนี้ไม่สามารถนำไปใช้ในการตัดสินใจ หรือนำไปใช้วางแผนได้

ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ ได้ อย่างไรก็ตาม ในทางปฏิบัติ ปัญหามักมีลักษณะเฉพาะของปัญหาแตกต่างกันไป เช่น ราคาขายโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก ตัวละ 370 บาท ราคาต่อหน่วยนี้ไม่ขึ้นอยู่กับปริมาณที่ขาย แต่ในทางปฏิบัติอาจมีการลดราคาสินค้าให้ลูกค้าบางรายที่ซื้อสินค้าจำนวนมากถึงระดับหนึ่ง เพื่อเป็นการส่งเสริมการขาย การใช้โปรแกรมเชิงเส้นสำหรับการวางแผนการผลิตในภาพรวมจึงมิได้คำนึงถึงประเด็นนี้ ดังนั้นการนำการโปรแกรมเชิงเส้นมาแก้ปัญหา จึงควรพิจารณาถึงข้อตกลงเบื้องต้นของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ดังนี้

(1) ความสามารถในการแบ่งแยกได้ (Divisibility) ตัวแปรตัดสินใจแต่ละตัวสามารถมีค่าเป็นเศษส่วน หรือ มีค่าไม่เป็นจำนวนเต็มก็ได้ จากตัวอย่างการวางแผนการผลิตจะพบว่าปริมาณการผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่เท่ากับ 40.71 ตัว ซึ่งมีค่าไม่เป็นจำนวนเต็ม อย่างไรก็ตาม โรงงานไม่สามารถผลิตสินค้านี้ จำนวน 40.71 ตัวได้ จึงต้องมีการปัดเศษ (Round off) ค่าผลเฉลยที่ได้ให้เป็นจำนวนเต็ม หากมีความต้องการให้ค่าของตัวแปรตัดสินใจมีค่าเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น จะต้องแก้ปัญหาโดยใช้ การโปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม (Integer programming) อย่างไรก็ตาม สำหรับปัญหาขนาดใหญ่การหาผลเฉลยของการโปรแกรมเชิงจำนวนเต็ม อาจต้องใช้เวลาประมวลผลนาน

(2) ความเป็นสัดส่วนกัน (Proportionality) การโปรแกรมเชิงเส้นมีหลักสำคัญคือ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงของตัวแปรตัดสินใจ กล่าวคือ

- ผลประโยชน์ที่ได้รับของฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่าของตัวแปรตัดสินใจ เช่น กำไรจากการขายโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก จำนวน 1 ตัวเท่ากับ 120 บาท ถ้าขายโต๊ะประเภทนี้ 5 ตัวจะได้กำไรทั้งสิ้น $5 \times 120 = 600$ บาท เป็นต้น

- หากพิจารณาที่ข้อจำกัดต่าง ๆ เช่น ข้อจำกัดเกี่ยวกับวัตถุดิบประเภทไม้แผ่น ในการผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก 1 ตัวใช้ไม้แผ่น จำนวน 2.5 ตารางฟุต หากมีการผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็กนี้ จำนวน 10 ตัว จะต้องใช้ไม้แผ่นจำนวน จำนวน $2.5 \times 10 = 25$ ตารางฟุต

(3) การบวกกันได้ (Additivity) ผลประโยชน์จากการกระทำกิจกรรมต่าง ๆ สามารถนำมาบวกกันได้เป็นผลประโยชน์รวม จากตัวอย่างจะเห็นว่าปริมาณผลกำไรต่อหน่วยที่ได้รับจากการผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก โต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่ และ เก้าอี้มีพนักพิง คือ 120 200 และ 90 บาทตามลำดับ ถ้าผลิตสินค้าแต่ละประเภท

จำนวน 10 ตัว กำไรที่ได้รับจากการผลิตสินค้าทั้งสามประเภทนี้สามารถรวมกัน ทำให้ผลกำไรรวมเท่ากับ 10 × 120 + 10 ×200 + 10 ×90 = 4,100 บาท สำหรับปริมาณของปัจจัยการผลิตหรือปัจจัยในการดำเนินกิจกรรมหนึ่งสามารถรวมกับปัจจัยการผลิตประเภทเดียวกันนี้เพื่อดำเนินกิจกรรมอื่น ๆ ได้ เช่น ปริมาณไม้แผ่นที่ใช้ในการผลิต เป็นต้น ปริมาณไม้แผ่นจำนวน 2.5 ตารางฟุตที่ใช้สำหรับการผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก จำนวน 1 ตัว ปริมาณไม้แผ่นจำนวน 7 ตารางฟุตสำหรับผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่จำนวน 1 ตัว และ 20 ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากรปริมาณไม้แผ่นจำนวน 3 ตารางฟุตสำหรับการผลิตเก้าอี้มีพนักพิงจำนวน 1 ตัว ถ้าผลิตโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็กจำนวน 10 หน่วย โต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่จำนวน 15 หน่วย และเก้าอี้มีพนักพิงจำนวน 20 หน่วย แล้วปริมาณไม้แผ่นที่นำมาใช้ผลิตนี้สามารถบวกกันได้ ทำให้ทราบปริมาณความต้องการไม้แผ่นเพื่อการผลิตทั้งหมดเท่ากับ 10 × 2.5 + 15 × 7 + 20 × 3 = 190 ตารางฟุต เป็นต้น

(4) ความแน่นอน (Certainty) ในทางปฏิบัติ พารามิเตอร์และค่าสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ในตัวแบบ มีค่าไม่แน่นอน เช่น ราคาขายสินค้าแต่ละชนิดในช่วงเวลาหนึ่ง อาจมีค่าสูงหรือต่ำขึ้นอยู่กับความต้องการของลูกค้าในช่วงเวลานั้นและ/หรือจำนวนการสั่งซื้อของลูกค้าแต่ละราย ชั่วโมงเครื่องจักรที่มีไว้เพื่อการผลิตอาจมีค่าไม่คงที่เนื่องจากเครื่องจักรเสียในช่วงเวลานั้นหรือไม่ เป็นต้น อย่างไรก็ตาม การใช้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อหาผลเฉลยเหมาะสมที่สุด และนำผลเฉลยนี้ไปใช้ในการวางแผนในอนาคต เช่น การวางแผนการผลิตรวมจะเป็นการมองภาพรวมของโรงงาน ซึ่งมิได้พิจารณายอดการสั่งซื้อของลูกค้าแต่ละคน ดังนั้น การสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นจะต้องประมาณค่าของพารามิเตอร์หรือสัมประสิทธิ์ให้เป็นค่าคงที่ ที่เราสามารถทราบค่าได้อย่างแน่นอน

(5) ความเป็นเชิงเส้น (Linearity) ความสัมพันธ์ของตัวแปรตัดสินใจในตัวแบบจะต้องมีความสัมพันธ์กันเป็นเชิงเส้น ทั้งในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ และข้อจำกัดต่าง ๆ ไม่มีการเขียนความสัมพันธ์อยู่ในรูปของค่าสัมบูรณ์ (Absolute value) ฟังก์ชันเอกโปรแนลเชียล (Exponential function) หรือลอการิทึม (Logarithmn)

(6) ความเป็นอิสระกัน (Independence) ปริมาณยอดขายสินค้าทั้งสามประเภทเป็นอิสระจากกัน ถ้ายอดขายโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็กเพิ่มขึ้นหรือลดลงจะไม่มีผลกระทบต่อยอดขายโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่ หรือเก้าอี้มีพนักพิง ดังนั้น ผลประโยชน์ที่ได้รับในฟังก์ชันวัตถุประสงค์สำหรับแต่ละตัวแปรตัดสินใจนั้น เป็นอิสระจากกัน กล่าวคือ ไม่ว่าจะขายโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่ หรือเก้าอี้ได้ในปริมาณเท่าใดก็ตาม กำไรจากการขายโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก ยังคงหาได้จากการนำเอา กำไรต่อหน่วย ซึ่งมีค่าเท่ากับ 120 บาทต่อตัว คูณกับปริมาณขายโต๊ะญี่ปุ่นขนาดเล็ก โดยไม่ขึ้นอยู่กับปริมาณการขายโต๊ะญี่ปุ่นขนาดใหญ่หรือเก้าอี้ดังกล่าว

<u>การใช้ประโยชน์เทคนิคในการวิเคราะห์ปัญหา</u>

ตามที่ได้กล่าวถึงหลักและวิธีการของเทคนิคกำหนดการเชิงเส้นไปแล้วข้างต้น สามารถนำไปใช้ประโยชน์ต่อการวางแผน หรือแก้ปัญหาของผู้ประกอบการในเรื่องต่างๆ 6 ด้าน ดังนี้

1. ปัญหาการจัดสรร

ทรัพยากรในทางอุตสาหกรรมได้แก่ แรงงานพนักงาน แรงงานเครื่องจักร วัตถุดิบที่ใช้ในการผลิต เงินทุนหมุนเวียนในการผลิต เป็นต้น ทรัพยากรในทางธุรกิจได้แก่ เวลาทำงานของพนักงาน วัสดุอุปกรณ์ใน

สำนักงานและธุรกิจ เงินลงทุน เงินทุนหมุนเวียนการประกอบธุรกิจ เป็นต้น ในช่วงของการวางแผนงานทางธุรกิจหรืออุตสาหกรรม ทรัพยากรเหล่านี้มีอยู่อย่างจำกัด อาจทำให้ไม่สามารถดำเนินกิจกรรมต่าง ๆ ในปริมาณที่ต้องการได้ องค์กรจึงต้องพิจารณาว่าควรจะทำกิจกรรมใดบ้างในปริมาณเท่าใด เพื่อให้ได้ประสิทธิภาพ หรือประสิทธิผลสูงสุด ตัวอย่างในทางธุรกิจ ได้แก่ การเลือกสื่อโฆษณา บริษัทต้องการทราบว่าควรจะมีแผนการโฆษณาในสื่อใดบ้าง เพื่อให้เข้าถึงกลุ่มเป้าหมายได้สูงสุด โดยคำนึงถึงรายจ่ายในการโฆษณาในแต่ละสื่อ ซึ่งบริษัทมีงบประมาณรวมในการโฆษณาจำนวนหนึ่ง ตัวอย่างทางธุรกิจถัดไป เป็นการเลือกพอร์ตลงทุน (Portfolio) ว่าภายใต้จำนวนเงินทุนที่มีอยู่ ธุรกิจควรเลือกลงทุนในกลุ่มธุรกิจใด เพื่อให้ได้ค่าคาดหมายผลตอบแทนในการลงทุน (Expected return on investment, E(ROI)) มีค่าสูงสุด ภายใต้ข้อจำกัดทางกฎหมาย นโยบายของบริษัท หรือความเสี่ยงในปริมาณที่ยอมรับได้ สำหรับตัวอย่างในทางอุตสาหกรรมและระบบโลจิสติกส์ เป็นการเลือกเครื่องจักร หรือพนักงานที่ทำงานให้เหมาะสมกับงานที่มีอยู่ โดยมีเป้าหมายหรือตัวชี้วัดผลสัมฤทธิ์คือ ต้นทุนรวมในการจัดสรรงานทั้งหมด

2. ปัญหาการผสม

ปัญหาการผสมสูตรอาหารสัตว์ สูตรอาหารเสริม และสูตรอาหารสำหรับคนที่ต้องการควบคุมน้ำหนักและดูแลสุขภาพ การผสมเคมีภัณฑ์ต่าง ๆ การผลิตน้ำมันปิโตรเลียม เป็นปัญหาที่พบเห็นกันโดยทั่วไป ปัญหาเหล่านี้จัดอยู่ในกลุ่ม ปัญหาการผสม (Blending or ingredient problem) ปัญหาการผสมสามารถหาผลเฉลยได้โดยใช้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ปัญหาการผสมนี้ต้องการทราบว่าปริมาณผลิตภัณฑ์ผสมมีจำนวนเท่าใด โดยคำนึงถึงสัดส่วนการผสมของสิ่งของ (หรือวัตถุดิบ) ตั้งแต่สองสิ่งขึ้นไป และปริมาณวัตถุดิบที่มีอยู่ เพื่อที่จะผลิตเป็นผลิตภัณฑ์ผสมหนึ่งชนิดหรือมากกว่า โดยมีต้นทุนต่ำที่สุดหรือให้ได้ปริมาณของผสมสูงสุด

Polimeno, et al.(1990) ได้ประยุกต์ใช้การโปรแกรมเชิงเส้นสำหรับการวางแผนการให้อาหารแก่วัวตามหลักโภชนา เพื่อให้ต้นทุนการผลิตต่ำสุด โดยพิจารณาข้อจำกัด 2 ประการหลักคือ (1) ค่าสูงสุดและต่ำสุดของปริมาณสารอาหารที่วัวต้องการ และ (2) ปริมาณน้ำนมที่วัวผลิตได้ในแต่ละวันต้องเพียงพอกับความต้องการ ตัวอย่างต่อไปนี้ แสดงให้เห็นการประยุกต์ใช้ตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นกับปัญหาการผสมสูตรอาหารเสริม สูตรอาหารสัตว์ และการผสมทางเคมี เพื่อผลิตน้ำมันเชื้อเพลิง นอกจากนี้ Briend, Ferguson and Darmon (2001) ได้นำตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นไปช่วยในการกำหนดแผนการรับประทานอาหารที่เหมาะสมสำหรับครอบครัว เพื่อให้มีค่าใช้จ่ายต่ำสุด และได้สารอาหารครบตามที่ร่างการต้องการ

3. การวางแผนทางการเงินและปฏิบัติการ

การโปรแกรมเชิงเส้นสามารถนำมาใช้ในการตัดสินใจที่เหมาะสมที่สุดสำหรับปัญหาทางการเงิน (Optimal financial decisions) ซึ่งแบ่งตามระยะเวลาของแผนได้เป็น 2 ประเภท คือ แผนระยะสั้น และแผนระยะยาว สองตัวอย่างแรกจะเป็นการนำตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ไปใช้สำหรับการวางแผนทางการเงินและการผลิตระยะสั้น การวางแผนการเงินระยะสั้น (Shortterm financial planning) เพื่อให้การปฏิบัติงานสอดคล้องกับเกณฑ์และตัวชี้วัดต่าง ๆ ทางการเงิน สำหรับการวางแผนการปฏิบัติงานในอุตสาหกรรมมักเกี่ยวข้องกับการจัดสรรทรัพยากรในการผลิต ได้แก่ แรงงาน วัตถุดิบ เป็นต้น เพื่อใช้ในการผลิตสินค้าให้สอดคล้องกับความต้องการและให้เกิดประโยชน์สูงสุด ซึ่งในปัจจุบันสินค้าที่ผลิตมักผ่านกระบวนการผลิตหลายขั้นตอนและใช้วัตถุดิบหลายชนิดทำให้การสร้างตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นมีความซับซ้อนมากขึ้น ส่วนตัวอย่างที่สามจะเป็นตัวอย่างการนำตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้น ในการจัดงบประมาณเงินทุน (Capital

budgeting) อย่างง่าย ในหัวข้อนี้จะขออธิบายเกี่ยวกับแนวคิดของมูลค่าเทียบเท่าปีปัจจุบันสุทธิ (Net Present Value, NPV) ซึ่งจะใช้เป็นตัวชี้วัดประสิทธิภาพของการลงทุนในโครงการต่าง ๆ

สำหรับการวางแผนการปฏิบัติงานของพนักงานและเครื่องจักรอุปกรณ์ในการผลิตก็มีการนำการตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นมาใช้ ตัวอย่างเช่น งานวิจัยของ Smith (1993) ได้เสนอตัวแบบการข้อจำกัดของตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อหาปริมาณการผลิตไฟฟ้าและประมาณต้นทุนไฟฟ้าที่ผลิตในแต่ละคาบเวลาโดยมีฟังก์ชันวัตถุประสงค์ คือ ต้นทุนรวมต่ำสุด และ 40 ตัวแบบการจัดสรรทรัพยากร ข้อจำกัด 4 ประการคือ ปริมาณความต้องการใช้ไฟฟ้า ความสามารถสูงสุดในการผลิต ปริมาณผลิตในแต่ละช่วงเวลาต้องไม่เกินปริมาณที่ได้รับสัมปทาน และพลังงานที่ต้องใช้ในการผลิต

4. ปัญหาการขนส่งและข่ายงาน

ปัญหาการขนส่งสินค้าเกี่ยวข้องกับการระบุว่าปริมาณขนส่งสินค้าจากแหล่งกำเนิด (Origin) ไปยังจุดหมายปลายทาง (Destination) ซึ่งจำนวนจุดเริ่มต้นและจุดปลายอาจมีจำนวนหลายแห่ง โดยทั่วไปวัตถุประสงค์ของปัญหาการขนส่ง คือ พยายามที่จะทำให้ต้นทุนค่าขนส่งมีค่าต่ำที่สุด หรือพยายามทำให้ระยะทางสั้นที่สุด ข้อจำกัดของปัญหาเหล่านี้มักเกี่ยวข้องกับความสามารถในการผลิตการจัดเก็บของแหล่งกำเนิดและปลายทาง ระยะเวลาในการขนส่งไปยังลูกค้า รวมทั้งความต้องการสินค้าของแต่ละจุดหมายปลายทาง ปัญหาการบรรทุกสินค้า (Truck loading) เป็นปัญหาในการตัดสินใจว่าจะนำสินค้าชนิดใดบรรทุกไปในรถบรรทุกคันแต่ละคันเพื่อทำให้มูลค่าของการขนส่งมีค่าสูงที่สุด

ปัญหาการขนส่งเป็นปัญหาเฉพาะของปัญหาขนถ่ายสินค้า จากยานพาหนะหนึ่งไปยังอีกยานพาหนะหนึ่ง หรือไปยังอีกแหล่งหนึ่ง ถ้าสินค้าขนส่งจากแหล่งกำเนิด แล้วผ่านจุดขนถ่ายสินค้า (Transshipment point) ก่อนที่จะส่งถึงจุดหมายปลายทาง (Destination point) ในปัจจุบันในการผลิตสินค้าของโรงงานต่าง ๆ มักจะส่งสินค้าจำนวนมาก ๆ ผ่านจุดตัวกลางซึ่งเป็นจุดกระจายสินค้า ไปยังพ่อค้าปลีกต่าง ๆ ซึ่งที่จุดกระจายสินค้านี้อาจมีการจัดแบ่งหีบห่อสินค้าให้มีขนาดตามที่ลูกค้าหรือร้านค้าปลีกต้องการแล้วจึงจัดรถบรรทุกที่มีขนาดเหมาะสมไปส่งยังลูกค้าหรือร้านค้าปลีก ทั้งนี้พยายามที่จะลดต้นทุนค่าขนส่งสินค้ารวม Mathur, Chanda and Tezuka (2003) ได้พัฒนาตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นสำหรับแก้ปัญหาการขนส่งถ่านหินในประเทศอินเดีย โดยพิจารณาทั้งทางด้านเศรษฐศาสตร์และทางด้านเทคนิค เพื่อจะทำให้การขนส่งนี้มีความประหยัดที่สุด

นอกจากการแก้ปัญหาการขนส่ง และข่ายงานแล้ว บางปัญหาอาจปัญหาในเชิงบูรณาการซึ่งรวมทั้งปัญหาการขนส่ง ปัญหาควบคุมสินค้าคงคลังและปัญหาการผลิต เช่น Chen and Wang (1997) ได้เสนอตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อบูรณาการการวางแผนการผลิตของบริษัทผลิตเหล็กในประเทศแคนาดา ซึ่งการวางแผนนี้จะกิจกรรมการวางแผนของบริษัททั้งหมด รวมทั้งการซื้อวัตถุดิบ การวางแผนการซื้อและการผลิตจะมีสำหรับสินค้าระหว่างผลิต การผลิตสินค้าสำเร็จรูป และการกระจายสินค้า ดังนั้นตัวแบบพิจารณาในด้านต้นทุนการผลิต อัตราการผลิต ความต้องการสินค้า ราคาขายและความสามารถของปัจจัยในการผลิต เพื่อการวางแผนการผลิตที่ให้ได้ผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด Smith (1993) ได้นำตัวแบบการโปรแกรมเชิงเส้นไปใช้ในการจัดสรรทรัพยากรในการผลิตกระแสไฟฟ้า การจ่ายไฟฟ้า และการคิดค่าไฟฟ้า เป็นต้น

5. การวิเคราะห์เชิงโอบล้อมข้อมูล (DEA)

โดยทั่วไป การวัดประสิทธิภาพของหน่วยงานหรือเครื่องจักรอุปกรณ์ต่าง ๆ สามารถทำได้โดยการหาอัตราส่วนระหว่างปริมาณของปัจจัยผลผลิตกับปริมาณของปัจจัยนำเข้า แล้วคูณด้วย 100 ในทางปฏิบัตินั้นมักมีปัจจัยการนำเข้ามากกว่า 1 ปัจจัยและปัจจัยผลผลิตก็อาจมากกว่า 1 ปัจจัยด้วย ทำให้เกิดแนวคิดที่จะถ่วงน้ำหนักปัจจัยนำเข้าต่างๆ ให้เป็นหน่วยมาตรฐาน ในทำนองเดียวกัน จะถ่วงน้ำหนักปัจจัยผลผลิตต่าง ๆ ให้เป็นหน่วยมาตรฐาน อย่างไรก็ตาม การกำหนดค่าถ่วงน้ำหนักต่าง ๆ ที่เหมาะสมนั้น บางครั้งเป็นการยากที่จะทำให้ทุกหน่วยงานหรือบุคคลที่เกี่ยวข้องยอมรับ ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของหน่วยงานต่าง ๆ เพื่อให้ทราบว่าหน่วยงานใดมีประสิทธิภาพดีกว่าหน่วยงานอื่น ๆ ที่พิจารณา ซึ่งจะทำให้ทราบว่าหน่วยงานใดเป็นหน่วยงานมาตรฐาน (Brench mark unit)

การวิเคราะห์เชิงโอบล้อมข้อมูล (Data Envelopment Analysis, DEA) เป็นวิธีการที่ใช้ข้อมูลสำหรับประเมินผลการปฏิบัติงานของหน่วยงานต่าง ๆ ที่เราสนใจ (Decision Making Units, DMUs) โดยทั่วไปหน่วยงานต่าง ๆ ที่เราสนใจจะใช้ทรัพยากรเข้าไปในหน่วยงานแล้วก่อให้เกิดเป็นผลผลิตออกมาในรูปต่าง ๆ กัน แต่ละหน่วยงาน อาจใช้ทรัพยากรหรือปัจจัยนำเข้าต่าง ๆ ในปริมาณที่แตกต่างกันและได้ผลผลิตในปริมาณที่แตกต่างกัน ส่งผลให้ขนาดของหน่วยงานที่นำมาวิเคราะห์และประเมินผลการปฏิบัติงานมีตั้งแต่หน่วยงานเล็ก ๆ จนถึงขนาดใหญ่ระดับประเทศ การวิเคราะห์เชิงโอบล้อมข้อมูล สามารถนำมาใช้วัดหน่วยงานที่มีขนาดแตกต่างกัน ซึ่งมีการใช้ทรัพยากรหรือปัจจัยนำเข้า และผลผลิตที่แตกต่างกันได้ ผลลัพธ์จากการวิเคราะห์เชิงโอบล้อมข้อมูล ทำให้ทราบว่าภายใต้หน่วยงานที่พิจารณาทั้งหมด หน่วยงานใดมีประสิทธิภาพสูงสุดและสำหรับหน่วยงานที่ไม่มีประสิทธิภาพ ควรลดการใช้ทรัพยากรหรือปัจจัยนำเข้าใดบ้าง จำนวนเท่าใด หรือเพิ่มผลผลิตใดบ้าง จำนวนเท่าใด

Charnes, Cooper and Rhodes (1978) ได้อธิบายว่า การวิเคราะห์เชิงโอบล้อมข้อมูลเป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่ถูกนำมาประยุกต์กับข้อมูลค่าสังเกต (Observational Data) แล้วเกิดแนวทางใหม่ในการประเมินความสัมพันธ์ต่างๆ เช่น ฟังก์ชันทางการผลิต และ/หรือประสิทธิภาพของพื้นผิวความเป็นไปได้ในเชิงการผลิต (Production possibility surfaces) ซึ่งเป็นองค์ความรู้เชิงเศรษฐศาสตร์สมัยใหม่

6. ตัวแบบการวางแผนหลายคาบเวลา

การตัดสินใจหาผลเฉลยที่ดีที่สุดสำหรับการวางแผนหลายคาบเวลา (Multiperiod planning) เราต้องการหาผลเฉลยว่าตัวแปรตัดสินใจในแต่ละคาบเวลา โดยค่าของตัวแปรตัดสินใจในคาบเวลาหนึ่งจะส่งผลต่อค่าของตัวแปรตัดสินใจในช่วงเวลาถัดไป

<u>ตัวอย่างปัญหาการจัดสรร และการประยุกต์เทคนิคกำหนดการเชิงเส้นในการแก้ปัญหา</u>

เจ้าของสวนป่ามีสวนป่ายูคาลิปตัสจำนวน 2 แปลง โดยแปลงที่ 1 มีเนื้อที่ 300 ไร่ แปลงที่ 2 เนื้อที่ 450 ไร่ โดยแปลงที่ 2 มีคุณภาพพื้นที่ดีกว่า ซึ่งผลผลิตของสวนป่าที่คาดว่าจะได้รับในช่วงเวลาจากปัจจุบันถึง 15 ปีข้างหน้า แบ่งเป็น 3 ช่วงระยะเวลา ดังแสดงในตาราง

<u>ตาราง</u> ผลผลิตในรูปปริมาตรไม้ที่ทำเป็นสินค้าได้ โดยประมาณไม้ยูคาลิปตัสในสวนป่า จำแนกตามแปลงและระยะคาบ

แปลง	เนื้อที่ (ไร่)	ผลผลิต (ตัน/ไร่)		
		คาบที่ 1	คาบที่ 2	คาบที่ 3
1	300	6.4	9.2	13.2
2	450	9.6	12.8	18.0

โดยเจ้าของต้องการเปลี่ยนจากสวนป่ายูคาลิปตัส เป็นสวนป่าไม้กระถินเทพา ภายในระยะเวลา 15 ปี โดยให้โครงสร้างของสวนป่าเมื่อสิ้นสุดระยะเวลาดังกล่าว ควรจะมีโครงสร้างสม่ำเสมอตามชั้นอายุ และประกอบด้วย 3 ชั้นอายุ นั่นคือ สวนป่าควรประกอบด้วยต้นไม้ที่มีอายุ 1-5 ปี 6-10 ปี และ 11-15 ปี ในสัดส่วนที่เท่ากันคือ 1 ใน 3 ของเนื้อที่ทั้งหมด พร้อมกันนี้ในช่วงที่ทำการเปลี่ยนโครงสร้างของสวนป่าให้เป็นสวนป่าไม้กระถินเทพา เจ้าของต้องการจะได้รับผลผลิตไม้ยูคาลิปตัสมากที่สุดด้วย โดยมีเงื่อนไขว่าจะไม่ตัดไม้กระถินเทพาออกในช่วงที่เปลี่ยนโครงสร้างสวนป่า

จากตัวอย่างข้างต้น จะใช้เทคนิคกำหนดการเชิงเส้นเพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว ดังนี้

เพื่อให้ได้ปริมาณไม้ยูคาลิปตัสมากที่สุด และเพื่อให้เกิดโครงสร้างเป็นสวนป่ากระถินเทพา 3 ชั้นอายุ เนื้อที่เท่ากัน คือ 250 ไร่/ชั้นอายุ; (300+450)/3 = 250

กำหนดตัวแปรตัดสินใจ ดังนี้

X11 = พื้นที่ทำไม้ (ไร่) ในแปลงที่ 1 คาบที่ 1
X12 = พื้นที่ทำไม้ (ไร่) ในแปลงที่ 1 คาบที่ 2
X13 = พื้นที่ทำไม้ (ไร่) ในแปลงที่ 1 คาบที่ 3
X21 = พื้นที่ทำไม้ (ไร่) ในแปลงที่ 2 คาบที่ 1
X22 = พื้นที่ทำไม้ (ไร่) ในแปลงที่ 2 คาบที่ 2
X23 = พื้นที่ทำไม้ (ไร่) ในแปลงที่ 2 คาบที่ 3

สร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นตรง ดังนี้

สมการวัตถุประสงค์

Maximum Z = 6.4X11 + 9.2X12 + 13.2X13 + 9.6X21 + 12.8X22 + 18X23

ข้อจำกัด

X11 + X21 <= 250

X12 + X22 <= 250

X13 +X23 <= 250

X11 + X12 + X13 <= 300

X21 + X22 + X23 <= 450

X11, X12, X13, X21, X22, X23 >= 0

นำกำหนดการเชิงเส้นที่ได้ไปวิเคราะห์เพื่อทราบผลเฉลยโดยคอมพิวเตอร์ โดยโปรแกรม LINDO 6.1 ปรากฏผล ดังนี้

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 5

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 9120.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X11	250.000000	0.000000
X12	50.000000	0.000000
X13	0.000000	1.200000
X21	0.000000	0.400000
X22	200.000000	0.000000
X23	250.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.000000
3)	0.000000	2.800000
4)	0.000000	8.000000
5)	0.000000	6.400000
6)	0.000000	10.000000

NO. ITERATIONS= 5

จากผลการวิเคราะห์ดังกล่าว พบว่า สามารถให้ปริมาตรไม้ยูคาลิปตัสตลอดช่วงเวลาที่เปลี่ยนโครงสร้างสวนป่ารวม 9,120 ตัน โดยสามารถนำค่าตัวแปรตัดสินใจ (variable) มากำหนดแผนการทำไม้ในแต่ละแปลง แต่ละคาบ และแสดงผลการทำไม้ยูคาลิปตัสได้ ดังนี้

<u>ตาราง</u> แสดงพื้นที่ทำไม้ยูคาลิปตัส (ไร่) ในแต่ละคาบ

แปลง	เนื้อที่ (ไร่)	พื้นที่ทำไม้ (ไร่)		
		คาบที่ 1	คาบที่ 2	คาบที่ 3
1	300	250	50	-
2	450	-	200	250
รวม	750	250	250	250

<u>ตาราง</u> แสดงผลการทำไม้ยูคาลิปตัส (ตัน) ในแต่ละคาบ

แปลง	ปริมาตรไม้รวม (ตัน)	ปริมาตรไม้ (ตัน)		
		คาบที่ 1	คาบที่ 2	คาบที่ 3
1	2,060	1,600	460	-
2	7,060	-	2,560	4,500
รวม	9,120	1,600	3,020	4,500

ตัวอย่างการวางแผนการขนส่งในทางป่าไม้ และการประยุกต์เทคนิคกำหนดการเชิงเส้นในการแก้ปัญหา

ผู้ประกอบการสวนป่ารายหนึ่ง มีโครงการปลูกสร้างสวนป่าไม้สักทางภาคเหนือของประเทศ โดยผู้ประกอบการมีเรือนเพาะชำสำหรับผลิตกล้าไม้สักจำนวน 3 แห่ง ในพื้นที่ต่างๆ สำหรับนำไปปลูกในพื้นที่ปลูกสร้างสวนป่าไม้สักจำนวน 4 แห่ง ซึ่งอยู่ในพื้นที่ห่างกัน ทั้งนี้ ผู้ประกอบการได้ประเมินกำลังผลิตกล้าไม้สักของเรือนเพาะชำแต่ละแห่ง ความต้องการกล้าไม้สักของแต่ละพื้นที่ และค่าใช้จ่ายในการขนส่งกล้าไม้สักจากเรือนเพาะชำไปยังพื้นที่ปลูกสร้างสวนป่าไม้สักแต่ละแห่ง ดังตารางด้านล่าง

ในการนี้ ผู้ประกอบการต้องการจ่ายค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดในการเคลื่อนย้ายกล้าไม้สักจากเรือนเพาะชำไปยังพื้นที่ปลูกสร้างสวนป่าไม้สักทั้ง 4 แห่ง ทั้งนี้ ให้สอดคล้องกับกำลังการผลิตของเรือนเพาะชำแต่ละแห่ง และความต้องการใช้กล้าไม้สักของพื้นที่ปลูกสร้างสวนป่าไม้สักทั้งหมดอย่างเพียงพอ

<u>ตาราง</u> แสดงกำลังผลิตกล้าไม้สัก ความต้องการกล้าไม้สักของพื้นที่แต่ละแห่ง และค่าใช้จ่ายในการขนส่งกล้าไม้สักจากเรือนเพาะชำไปยังพื้นที่ปลูกสร้างสวนป่าไม้สักแต่ละแห่ง

เรือนเพาะชำ	ค่าใช้จ่ายในการขนส่งกล้าไม้สัก (บาทต่อกล้า)				กำลังผลิตกล้าไม้ (ล้านกล้า)
	C1	C2	C3	C4	
N1	0.8	1.9	2.2	0.6	5
N2	1.5	0.6	1.6	0.5	1
N3	0.7	0.8	0.9	1.2	2
ความต้องการกล้าไม้ (ล้านกล้า)	2	3	3	1	

จากตัวอย่างข้างต้น จะใช้เทคนิคกำหนดการเชิงเส้นเพื่อทราบค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุดสำหรับเคลื่อนย้ายกล้าไม้จากเรือนเพาะชำแต่ละแห่งไปยังแปลงปลูกสร้างสวนป่าไม้สักทั้ง 4 แห่ง ดังนี้

กำหนดตัวแปรตัดสินใจดังนี้

N1C1 = ค่าใช้จ่ายจากเรือนเพาะชำ N1 ไปยังแปลงปลูกสร้างสวนป่า C1
N1C2 = ค่าใช้จ่ายจากเรือนเพาะชำ N1 ไปยังแปลงปลูกสร้างสวนป่า C2
N1C3 = ค่าใช้จ่ายจากเรือนเพาะชำ N1 ไปยังแปลงปลูกสร้างสวนป่า C3
N1C4 = ค่าใช้จ่ายจากเรือนเพาะชำ N1 ไปยังแปลงปลูกสร้างสวนป่า C4
N2C1 = ค่าใช้จ่ายจากเรือนเพาะชำ N2 ไปยังแปลงปลูกสร้างสวนป่า C1
N2C2 = ค่าใช้จ่ายจากเรือนเพาะชำ N2 ไปยังแปลงปลูกสร้างสวนป่า C2
N2C3 = ค่าใช้จ่ายจากเรือนเพาะชำ N2 ไปยังแปลงปลูกสร้างสวนป่า C3
N2C4 = ค่าใช้จ่ายจากเรือนเพาะชำ N2 ไปยังแปลงปลูกสร้างสวนป่า C4
N3C1 = ค่าใช้จ่ายจากเรือนเพาะชำ N3 ไปยังแปลงปลูกสร้างสวนป่า C1
N3C2 = ค่าใช้จ่ายจากเรือนเพาะชำ N3 ไปยังแปลงปลูกสร้างสวนป่า C2

N3C3 = ค่าใช้จ่ายจากเรือนเพาะชำ N3 ไปยังแปลงปลูกสร้างสวนป่า C3

N3C4 = ค่าใช้จ่ายจากเรือนเพาะชำ N3 ไปยังแปลงปลูกสร้างสวนป่า C4

สร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น ดังนี้

สมการวัตถุประสงค์

Minimum z = 0.8 N1C1 + 1.9 N1C2 + 2.2 N1C3 + 0.6 N1C4 + 1.5 N2C1 + 0.6 N2C2 + 1.6 N2C3 + 0.5 N2C4 + 0.7 N3C1 + 0.8 N3C2 + 0.9 N3C3 + 1.2 N1C4

ข้อจำกัด

N1C1 + N1C2 + N1C3 + N1C4 <= 5
N2C1 + N2C2 + N2C3 + N2C4 <= 1
N3C1 + N3C2 + N3C3 + N3C4 <= 2
N1C1 + N2C1 + N3C1 >= 2
N1C2 + N2C2 + N3C2 >= 3
N1C3 + N2C3 + N3C3 >= 2
N1C4 + N2C4 + N3C4 >= 1
N1C1, N1C2,..., N3C4 >= 0

นำกำหนดการเชิงเส้นที่ได้ไปวิเคราะห์เพื่อทราบผลเฉลยโดยคอมพิวเตอร์ โดยโปรแกรม LINDO 6.1 ปรากฏผล ดังนี้

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      11
     OBJECTIVE FUNCTION VALUE
     1)      8.400000
 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
     N1C1        2.000000          0.000000
     N1C2        2.000000          0.000000
     N1C3        0.000000          0.200000
     N1C4        1.000000          0.000000
     N2C1        0.000000          2.000000
     N2C2        1.000000          0.000000
     N2C3        0.000000          0.900000
     N2C4        0.000000          1.200000
     N3C1        0.000000          1.000000
     N3C2        0.000000          0.000000
     N3C3        2.000000          0.000000
     N3C4        0.000000          1.700000
      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)        0.000000          0.000000
```

3)	0.000000	1.300000
4)	0.000000	1.100000
5)	0.000000	-0.800000
6)	0.000000	-1.900000
7)	0.000000	-2.000000
8)	0.000000	-0.600000

NO. ITERATIONS= 11

และสามารถสรุปจำนวนการขนส่งกล้าไม้จากเรือนเพาะชำแต่ละแห่งไปยังพื้นที่ปลูกป่าในแต่ละแปลงได้ดังนี้

เรือนเพาะชำที่	จำนวนกล้าไม้ที่นำไปยังแปลงที่ (ล้านกล้า)				รวมกล้าไม้ในแต่ละเรือนเพาะชำ
	C1	C2	C3	C4	
N1	2	2		1	5
N2		1			1
N3			2		2
รวมกล้าไม้ที่จัดส่งให้แต่ละพื้นที่ปลูกป่า	2	3	2	1	

โดยสามารถคิดค่าใช้จ่ายในการขนส่งกล้าไม้จากแต่ละเรือนเพาะชำไปยังพื้นที่ปลูกสร้างสวนป่าทุกพื้นที่รวมแล้วน้อยที่สุดเท่ากับ 8.4 ล้านบาท ดังตารางด้านล่าง

เรือนเพาะชำ	ค่าใช้จ่ายในการขนส่งกล้าไม้สัก (ล้านบาท)				ระยะทางรวม (กิโลเมตร)
	C1	C2	C3	C4	
N1	1.6	3.8		0.6	6.0
N2		0.6			0.6
N3			1.8		1.8
ระยะทางรวม (กิโลเมตร)	1.6	4.4	1.8	0.6	8.4